TITLE:
ポートフォリオ選択と最適停止問題(数理計画モデルにおける最適化理論)

AUTHOR(S):
土肥, 正; 尾崎, 俊治

CITATION:
土肥, 正 ...[et al]. ポートフォリオ選択と最適停止問題(数理計画モデルにおける最適化理論). 数理解析研究所講究録 1992, 798: 78-88

ISSUE DATE:
1992-08

URL:
http://hdl.handle.net/2433/82803

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第798巻1992年78-88

ポートフォリオ選択と最適停止問題
(PORTFOLIO SELECTION AND OPTIMAL STOPPING PROBLEM)

広島大学工学部　土肥　正 (Tadashi DOHI)
広島大学工学部　尾崎俊治 (Shunji OSAKI)

Abstract—This paper develops the new growth and security criteria of the portfolio decision problem in continuous-time. The growth criterion of the portfolio is defined as maximization of the net expected capital accumulation that the agent will obtain when his wealth arrives at the target level determined in advance. On the other hand, the security criterion is defined as maximization of the probability of reaching the target level before ruin. We formulate mathematically this problem applying the threshold stopping rule for the stochastic process and derive numerically the growth-security optimal portfolio. Some interesting results on such an investment policy are discussed in detail.

1. 序論

本稿では，個人投資家のポートフォリオ決定問題に関する新しい評価尺度を導入する．ポートフォリオを選択する際の興味深い評価尺度として，資産価格が予め投資家によって定められた目標レベルに到達するまでの期待時間を最小化する問題が挙げられる．Heath and Sudderth [1], Heath, Orey, Pestien and Sudderth [2]は単純な設定の下でこの種の最適ポートフォリオ決定問題について議論している．さらに，Li and Ziemba [4]やMacLean, Ziemba and Blazenko [5]は，上記の評価尺度をポートフォリオの成長基準として定義し，ポートフォリオの成長と安全に関する議論を展開している．

予め富の目標レベルが設定されるという投資戦略は，現実の証券市場における指し値取引(trading by limit)と呼ばれるものに対応しており，このような取引制度が現実の証券会社によって採用されていることは周知の通りである．実際，現実の証券市場において観測される個人投資家の行動は，自らの効用関数を最大化するためにポートフォリオの組み替えを絶えず行っているというよりはむしろ，“継続”か“停止”かという2つの行動パターンによって説明されるといっても過言ではない．上述の証券投資戦略は確率過程論における最適停止問題として特徴づけられるであろう．しかしながら，このような

戦略的(operational)なポートフォリオ選択問題を定性的に評価することは非常に重要であるにもかかわらず, それに関する理論的な研究は現在までほとんど報告されていないのが現状である.

Li and Ziemba [4] は資産価格が目標レベルに到達するまでの期待時間の最小化をポートフォリオの成長基準として導入したが, はたしてそのような最適化問題の解が投資家にとって重要な指標を提供するのであろうか. 投資家にとって最も興味のある情報は, 自らの資産価格が目標レベルに到達したときに, ポートフォリオの組み替えを"停止"することによって得ることのできる期待利得に他ならないであろう. よって, 本稿ではポートフォリオの成長に関する新しい評価尺度として, しきい値停止ルール(threshold stopping rule)の下での期待利得を用いる.

ここでは特に, 2種類の異なった停止ルールを考える. 1つめは, 前述のように, 目標レベルに資産価格が到達するまではポートフォリオの組み替えを継続的に行い, 到達した時点で取引を停止し, 決済するものである. 2つめの停止ルールとは, 資産価格の目標レベルを設定するとともに破産レベルをも設定し, 破産する前に目標レベルに到達したならば決済を行うけれども, そうでない場合はすべて破産宣告を受けるというものである. このような停止ルールの下でのポートフォリオの成長の尺度は, 破産する前に目標レベルに到達した場合の条件付き期待利得となる. また, ポートフォリオの安全の基準としては, Li and Ziemba [4] や MacLean, Ziemba and Blazenko [5] によって導入された尺度, つまり, 資産価格が破産レベルに落ち込む前に目標レベルに到達する確率の最大化をそのまま用いる. これより, ポートフォリオの成長と安全を考慮した投資戦略の構築が可能となる.

本稿の構成は以下の通りである. まず次節において, 証券市場の構造および証券価格に関する仮定について説明する. 続いて第3節では, ポートフォリオの成長と安全に関する2つの評価尺度を提案し, それらを解析的に導出する. 特に, 投資家の計画期間は無限大であると仮定される. 第4節では, 最適ポートフォリオ及び対応する種々の尺度の値を数値的に求める. 特に, 感度分析により, 各パラメータが投資戦略ならびに評価尺度に及ぼす影響について考察を行う.

2. 証券市場に関する仮定

資本市場の構造について以下のような標準的な仮定を設定しよう. (i)空売りは認めない; (ii)取引における税金及び手数料はかからない; (iii)すべての証券は無限に分割可能である; (iv)危険資産に対する配当は無視できる; (v)投資家は競争的であり, 連続時間において取引を行う. さらに本稿で想定する投資家は，いわゆる，市場においてprice takerとはならないような"小さな投資家" (small investor) であることに注意されたい．$B(t)$ を1次元標準Brown運動過程とする．市場には2種類の証券のみが存在し，そのうちのひとつは債権などの無危険資産で，その価格過程は次のような常微分方程式の解として定義される．

$$dP_0(t) = rP_0dt; \quad P_0(0) = p_0. \tag{1}$$

ここで，r は無危険利子率で，非負の定数とする．一方，複数の株式などから構成される危険資産があり, その価格過程は以下のような確率微分方程式によって記述されるものとする．

$$dP(t) = P(t)\{\mu dt + \sigma dB(t)\}; \quad P(0) = p. \tag{2}$$

ここで，μ および σ は危険資産の瞬間的な平均収益率およびボラティリティーであり, 非負の定数である．特に，一般性を失うことなく $\mu > r$ が仮定できるものとする．

投資家は時刻 t において富 $W(t)$ を保有し，危険資産に $q(t)$ 単位，非危険資産に $q_0(t)$ 単位投資するものとしよう. そのとき，投資家の総資産価格は $W(t) = q(t)P(t) + q_0(t)P_0(t)$ によって表現される．いま，総資産中の危険資産に投資する投資比率を $\alpha = q(t)P(t)/W(t)$ (ただし，$0 \leq \alpha \leq 1$) として定義し，投資家はこの比率を投資期間を通じて一定に保つものとする．本稿ではこのような α を投資比率，もしくは，単にポートフォリオ (portfolio) と呼ぶことにしよう. これより, 投資家の総資産価格は以下のように表現される．

$$dW(t) = \{(\mu - r)\alpha + r\}W(t)dt + \sigma\alpha W(t)dB(t). \tag{3}$$

あるいは，Itôの補題を用いて,

$$W(t) = W(0)\exp[m(\alpha)t + \sigma\alpha B(t)]. \tag{4}$$

ここで，

$$m(\alpha)=(\mu-r)\alpha+r-\frac{\sigma\alpha^2}{2} \tag{5}$$

であり，$W(0)$は初期$(t=0)$の資産価格である．これより，総資産価格過程は明かに次のような対数正規分布に従うことが容易に示される．

$$\Pr\{W(t)\le w \mid W(0)=w_0\}=\mathrm{N}[\frac{\log(w/w_0)-m(\alpha)t}{\sigma\alpha\sqrt{t}}]. \tag{6}$$

ここで，N[·]は標準正規分布関数である．さらに，投資家は$m(\alpha)>0$となるようなポートフォリオを常に設定するはずであるので，ポートフォリオαに対応する許容制御量のクラスは次のように設定される．

$$C=\{\alpha \mid 0\le\alpha\le 1 \text{ and } \alpha<\frac{\mu-r+\sqrt{(\mu-r)^2+2r\sigma^2}}{\sigma^2}\}. \tag{7}$$

3. ポートフォリオの成長基準と安全基準

投資家の証券市場への滞在期間には制限がないものとする(つまり，必ずしもある有限時刻内にすべての資産を強制的に決済しなければならないということはない)．また，投資家は自らの富の目標レベルX_1 $(w_0<X_1<\infty)$を持ち，富が目標レベルに到達する最初の時刻において，さらに再投資するか，もしくは市場から撤退するかを再考するものとする．本稿では，このような投資戦略をしきい値停止ルールと呼ぶことにする．これより，しきい値停止ルールの下での投資家の停止時刻は以下のように定義される．

$$\tau_{w_0X_1}\equiv\inf\{t; W(t)\ge X_1 \mid W(0)=w_0\}. \tag{8}$$

また，投資家は破産レベルと呼ばれる富の下限値X_2 $(0<X_2<w_0)$を設定し，自らの資産価格がこのレベルに達した時点で，市場から撤退，もしくは破産宣告を受けるものとする．そのとき，対応する停止時刻は，

$$\tau_{w_0X_2}\equiv\inf\{t; X_2\ge W(t) \mid W(0)=w_0\} \tag{9}$$

のように定義される．

Li and Ziemba [4] は，ポートフォリオの成長と安全の2つの尺度を導入することによって，2種類の平均ー分散効率的ポートフォリオについて議論を行っている．つまり，成長の基準として，彼らは資産価格が投資家の目標レベルに最初に到達する期待時刻の最小化を，安全の基準として，破産する前に資産価格が目標レベルに到達する確率を最大化することを提案した．しかしながら，Li and Ziemba [4] も述べているように，現実の証券投資に際して，そのような戦略が必ずしも常に重要であるとは限らない．何故ならば，目標レベルへの到達時刻を調べることは，あくまで投資家にとっては2次的な問題であるからである．

しきい値停止ルールに従う投資家にとって最も重要かつ興味のある情報は，明かにそのような投資戦略下で期待され得る収益(return)と危険(risk)であろう．そのような点を鑑み，本稿ではポートフォリオの成長に関する新しい評価尺度を提案する．つまりポートフォリオの成長の基準として，しきい値停止ルールの下での期待利得を次のように定義する．

$$V_\infty(\alpha) = \int_0^\infty X_1 \exp(-rt) f_{X_1}(t)dt = X_1\left(\frac{X_1}{w_0}\right)^{\frac{m(\alpha)-\xi(\alpha)}{\sigma^2\alpha^2}}. \tag{10}$$

ここで，

$$\xi(\alpha) = \sqrt{m(\alpha)^2 + 2r\sigma^2\alpha^2} \tag{11}$$

であり，$f_{X_1}(t)$ は次に示すような逆Gauss型の確率密度関数である．

$$f_{X_1}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Pr\{\tau_{w_0 X_1} \le t \mid X_1 > w_0\} = \frac{\log(X_1/w_0)}{\sqrt{2\pi\sigma^2\alpha^2 t^3}} \exp\left[-\frac{(-m(\alpha)t + \log(X_1/w_0))^2}{2\sigma^2\alpha^2 t}\right]. \tag{12}$$

上記の結果は，確率過程の初到達問題に関する標準的な手続きによって得られる(詳細は Karlin and Taylor [3] を参照のこと)．

ここで，$V_\infty(\alpha)$ は富の破産レベル X_2 が0のときのしきい値停止ルールの下での期待利得であることに注意しよう(破産レベルが考慮される場合は後に議論される)．さらに，式(10)において不確実性を表す確率変数は停止時刻

だけであることが分かる．このように，上記のポートフォリオ尺度は通常の平均ー分散アプローチ[6]とは異なっており，投資家の効用とも独立である．ここでは特に，$V_\infty(\alpha)$を最大にするようなポートフォリオを最適·成長ポートフォリオ(growth-optimal portfolio)と呼ぶことにする．

一方，Li and Ziemba[4]に従って，ポートフォリオの安全基準として次のような破産前に目標レベルに到達する確率を考えよう.

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &=\Pr\{\tau_{w_0X_1} < \tau_{w_0X_2} \mid W(0)=w_0\}\\ &=\frac{1-(X_2/w_0)^{h(\alpha)}}{1-(X_2/X_1)^{h(\alpha)}}.\end{aligned} \tag{13}$$

ここで，

$$h(\alpha) =\frac{2m(\alpha)}{\sigma^2\alpha^2} \tag{14}$$

である．式(13)の詳しい導出についてはKarlin and Taylor[3]を参照されたい．

$\phi(\alpha)$はαに対して減少関数となるので，$\phi(\alpha)$を最大にするポートフォリオは明かに$\alpha=0$のときであり，そのようなポートフォリオは最適·安全ポートフォリオ(security-optimal portfolio)と呼ばれる(つまり，非危険資産に十分に投資することが最適である).

これより，投資家の問題は

$$\begin{cases}\max\limits_{\alpha\in C} V_\infty(\alpha),\\ \text{s.t.}\ \ \phi(\alpha)\ge\gamma\end{cases} \tag{15}$$

となるようなポートフォリオを選択することである．ここで，γは投資家によって予め設定される確率の下限値であり，$\gamma\in[0,1]$である．我々は式(15)によって与えられるポートフォリオを最適·成長ー安全ポートフォリオ(growth-security optimal portfolio)と呼ぶことにする．

先の議論では，期待資本利得$V_\infty(\alpha)$における破産レベルは0であることが仮定されていた．次に，より一般的なポートフォリオの成長の尺度として，投資家の富が目標レベルに到達する前に破産レベルに達したならば，彼は証券市場から撤退するものと仮定する．そのような状況において，投資家の期待資本利得は以下のように定義される．

$$\begin{aligned}Z_\infty(\alpha) &= \int_0^\infty X_1\exp(-rt)g_{w_0X_1}(t)dt\\ &\quad+\int_0^\infty X_2\exp(-rt)g_{w_0X_2}(t)dt.\end{aligned} \tag{16}$$

ここで，

$$g_{w_0 X_1}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Pr\{\tau_{w_0 X_1} \leq t \mid \tau_{w_0 X_1} < \tau_{w_0 X_2}\}, \tag{17}$$

$$g_{w_0 X_2}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Pr\{\tau_{w_0 X_2} \leq t \mid \tau_{w_0 X_1} > \tau_{w_0 X_2}\} \tag{18}$$

である．上記の期待利得には破産レベルX_2が考慮されていることが明白であろう．

次に，式(16)の具体的な評価に移ろう．Eを停止時刻に対する期待値演算子とするならば，条件付期待値の評価により，

$$\begin{cases} \mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_1}}] = \mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_1}} \mid \tau_{w_0 X_2} > \tau_{w_0 X_1}] + \mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_2}} \mid \tau_{w X_1} > \tau_{w X_2}] \cdot \mathrm{E}[e^{-r\tau_{X_2 X_1}}] \\ \mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_2}}] = \mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_2}} \mid \tau_{w_0 X_2} < \tau_{w_0 X_1}] + \mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_1}} \mid \tau_{w_0 X_1} < \tau_{w_0 X_2}] \cdot \mathrm{E}[e^{-r\tau_{X_2 X_1}}] \end{cases} \tag{19}$$

となる．ここで，

$$\mathrm{E}[e^{-r\tau_{X_2 X_1}}] = \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{\frac{m(\alpha)-\xi(\alpha)}{n(\alpha)^2}}, \tag{20}$$

$$\mathrm{E}[e^{-r\tau_{X_1 X_2}}] = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{\frac{m(\alpha)+\xi(\alpha)}{n(\alpha)^2}}, \tag{21}$$

$$\mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_2}}] = \left(\frac{X_2}{w_0}\right)^{\frac{m(\alpha)+\xi(\alpha)}{n(\alpha)^2}} \tag{22}$$

であり，$\mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_1}}]$は$V_\infty(\alpha)/X_1$によって与えられる．

式(19)の$\mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_2}} \mid \tau_{w_0 X_2} < \tau_{w_0 X_1}]$及び$\mathrm{E}[e^{-r\tau_{w_0 X_1}} \mid \tau_{w_0 X_1} < \tau_{w_0 X_2}]$に関する連立方程式を解くことによって，破産レベルを伴う投資家の期待資本利得は次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} Z_\infty(\alpha) = & X_1 \cdot \frac{(X_2/w_0)^{\pi_1} - (X_2/w_0)^{\pi_2}}{(X_2/X_1)^{\pi_1} - (X_2/X_1)^{\pi_2}} \\ & + X_2 \cdot \frac{(X_1/w_0)^{\pi_1} - (X_1/w_0)^{\pi_2}}{(X_1/X_2)^{\pi_1} - (X_1/X_2)^{\pi_2}}. \end{aligned} \tag{23}$$

ここで，

$$\pi_1(\alpha) \equiv \frac{m(\alpha) - \xi(\alpha)}{\sigma^2 \alpha^2}, \tag{24}$$

$$\pi_2(\alpha) \equiv \frac{m(\alpha)+\xi(\alpha)}{\sigma^2\alpha^2} \tag{25}$$

である．

式(15)の場合と同様に，ここでの問題もまた以下のように定式化される．

$$\begin{cases} \max_{\alpha \in C} Z_\infty(\alpha), \\ \text{s.t.} \quad \phi(\alpha) \geq \gamma. \end{cases} \tag{26}$$

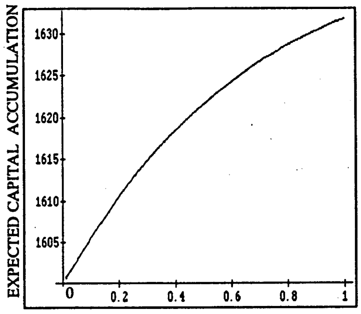
以上，本節ではしきい値停止ルールを適用することによって，ポートフォリオの成長に関する2つの新しい評価尺度を提案し，それらを解析的に導出することができた．しかしながら，式(15)及び式(26)を満足する最適·成長一安全ポートフォリオを解析的に導出することは極めて困難である．故に，次節において，最適ポートフォリオ及び対応する評価尺度の値を数値的に求めることを試みる．さらに，感度分析によって，各パラメータの値が上述の2つの投資戦略問題に如何に影響を与えるかについて考察を行う．

4. 数値例と考察

Figure 1. は，しきい値停止ルールの下での期待利得$V_\infty(\alpha)$のαに対するふるまいを示している．グラフの形状として，$V_\infty(\alpha)$は単調増加関数か，もしくは上に凸な単峰関数となることがわかる．この結果はパラメータの大小関係$\mu > r$に依存している(事実，$\mu < r$ならば利得関数の形状は単調減少もしくは下に凸な単峰型となることが確認できる)．$\phi(\alpha)$がαの減少関数となることに注意すれば，式(15)によって与えられる最適·成長一安全ポートフォリオは，比較的簡単な数値計算によって求めることができる．

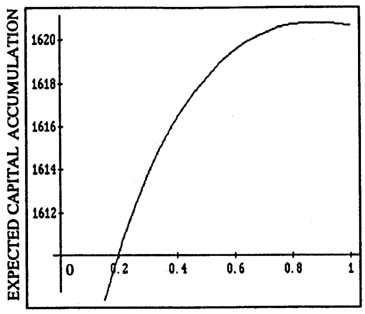
議論を簡単にするために$\gamma = 0$を仮定しよう．この仮定により，我々は$V_\infty(\alpha)$を最大にするような$\alpha \in C$を見つければよいことになる．Table 1. は最適ポートフォリオα^*と関連する成長基準$V_\infty(\alpha^*)$および安全基準$\phi(\alpha^*)$の値を示している．α^*の値が1となるのは$V_\infty(\alpha)$が単調増加関数となるときであり，そうでない場合はαの単峰関数となる．特に，σの値が大きくなる程，最適ポートフォリオの値は小さくなっていることが分かる．つまり，危険資産価格のバラツキが大きくなれば，無危険資産への投資比率を増やすべきであることを示しており，この結果は我々の直観を満足させるものである．さらに，初期

資産価格 w_0 ならびに危険資産の期待収益率 μ の値が大きくなるにつれて，$V_\infty(\alpha^*)$ 及び $\phi(\alpha^*)$ の値も大きくなることも確認できる．



Increasing Function

$\left[\begin{array}{lll} \mu = 0.0788, & \sigma = 0.2, & w_0 = 1600[\$], \\ r = 0.0488, & X_1 = 1700[\$] & \end{array}\right]$



Unimodal Function

$\left[\begin{array}{lll} \mu = 0.0788, & \sigma = 0.4, & w_0 = 1600[\$], \\ r = 0.0488, & X_1 = 1700[\$] & \end{array}\right]$

Figure 1. Pattern on Behavior of $V_\infty(\alpha)$ for $\alpha \in [0, 1]$.

Table 1. Growth-security optimal portfolio and the corresponding growth measure $V_\infty(\alpha)$ for the various values of the realization parameters.

(r = 0.0488, X_1 = 1700 [\$])

w_0	μ	σ	α^*	$V_\infty(\alpha^*)$	$\phi(\alpha^*)$
1550	0.0788	0.2	1.000000	1597.24	0.594613
1550	0.0788	0.3	1.000000	1588.93	0.542388
1550	0.0788	0.4	0.880370	1580.80	0.529387
1550	0.0588	0.2	1.000000	1568.91	0.570923
1550	0.0588	0.3	1.000000	1564.49	0.531653
1550	0.0588	0.4	0.812887	1561.05	0.526094
1600	0.0788	0.2	1.000000	1631.84	0.746520
1600	0.0788	0.3	1.000000	1626.26	0.703263
1600	0.0788	0.4	0.880380	1620.79	0.711501
1600	0.0588	0.2	1.000000	1612.78	0.727145
1600	0.0588	0.3	1.000000	1609.80	0.694122
1600	0.0588	0.4	0.812911	1607.48	0.689354
1650	0.0788	0.2	1.000000	1666.09	0.880820
1650	0.0788	0.3	1.000000	1663.28	0.855568
1650	0.0788	0.4	0.880380	1660.52	0.860463
1650	0.0588	0.2	1.000000	1656.48	0.869648
1650	0.0588	0.3	1.000000	1654.97	0.850089
1650	0.0588	0.4	0.812898	1653.79	0.847212

次に，成長の尺度に破産レベルを考慮する場合を考えよう．期待利得$Z_\infty(\alpha)$の形状も$V_\infty(\alpha)$の場合と同様に，単調増加関数か上に凸な単峰関数のいづれかとなる．Table 2. は$X_2 = 700$ [$] および$X_2 = 1400$ [$] の2つの破産レベルを考慮した場合の数値例を示している．α^*の値が1以外のときはすべて，$Z_\infty(\alpha)$は上に凸な単峰関数となっている．この場合においても，初期資産や期待収益率が大きい程，あるいは，ボラティリティーや破産レベルが小さい程，最適ポートフォリオの値は大きくなる．

Table 2. Growth-security optimal portfolio and the corresponding growth measure $Z_\infty(\alpha)$ for the various values of the realization parameters.

(r = 0.0488, X_1 = 1700 [$])

			X_2 =1400[$]			X_2=700[$]		
W_0	μ	σ	α^*	$Z_\infty(\alpha^*)$	$\phi(\alpha^*)$	α^*	$Z_\infty(\alpha^*)$	$\phi(\alpha^*)$
1550	0.0788	0.2	0.357910	1571.00	0.908632	0.995704	1592.82	0.975585
1550	0.0788	0.3	0.233738	1564.43	0.903541	0.638514	1580.42	0.971669
1550	0.0788	0.4	0.173607	1560.98	0.900875	0.469477	1573.56	0.969422
1550	0.0588	0.2	0.343821	1557.43	0.898126	0.920246	1566.23	0.966954
1550	0.0588	0.3	0.227700	1555.01	0.896257	0.605225	1561.06	0.965176
1550	0.0588	0.4	0.170214	1553.77	0.895292	0.450823	1558.38	0.964244
1600	0.0788	0.2	0.397662	1615.44	0.939429	1.000000	1629.08	0.984492
1600	0.0788	0.3	0.259862	1610.65	0.935502	0.647732	1620.70	0.981273
1600	0.0788	0.4	0.192937	1608.12	0.933419	0.476235	1616.05	0.979761
1600	0.0588	0.2	0.381944	1605.51	0.931266	0.933472	1611.06	0.978097
1600	0.0588	0.3	0.252875	1603.72	0.929796	0.613917	1607.55	0.976895
1600	0.0588	0.4	0.189007	1602.80	0.929035	0.457302	1605.72	0.976264
1650	0.0788	0.2	0.432816	1658.32	0.969440	1.000000	1664.79	0.992708
1650	0.0788	0.3	0.282730	1655.75	0.967234	0.656423	1660.55	0.990716
1650	0.0788	0.4	0.209875	1654.40	0.966057	0.482611	1658.19	0.989954
1650	0.0588	0.2	0.415408	1652.99	0.964831	0.945959	1655.65	0.989114
1650	0.0588	0.3	0.275016	1652.02	0.963981	0.622121	1653.86	0.988506
1650	0.0588	0.4	0.205559	1651.52	0.963536	0.463411	1652.93	0.988186

さらに，破産レベルがポートフォリオの成長基準に考慮される場合とされない場合との比較を行う. Table 1. とTable 2. から，富の破産レベルが小さくなる程，期待利得は大きくなると同時に，安全基準としての確率の値は大きくなる．同様に，破産レベルの値が小さければ小さいほど，最適ポート

フォリオの値は大きくなる．つまり，破産レベルが低めであれば，それだけ投資家は資産の組替えを継続的に行うことができるので，ポートフォリオの値が小さくなることは直観的に理解できよう．

このように，ポートフォリオの成長および安全に関する評価尺度を解析的に陽に導出することによって，しきい値停止ルールに従う投資家に有益な情報を提供することが可能となる．本稿で提案された評価基準を用いて，最適なポートフォリオを数値的に求める手続きは比較的簡単であり，現実の証券投資に関する意思決定を容易にするものと思われる．

参考文献

1. Heath, D.C. and Sudderth, W.D., Continuous–Time Portfolio Management: Minimizing the Expected Time to Reach a Goal, Working Paper, Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, (1984).
2. Heath, D.C., Orey, S., Pestien, V.C. and Sudderth, W.D., Minimizing or Maximizing the Expected Time to Reach Zero, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **25**, 195-205, (1987).
3. Karlin, S. and Taylor, H.M., *A Second Course in Stochastic Process*, Academic Press, N.Y., 1981.
4. Li, Y. and Ziemba, W.T., Security Aspects of Optimal Capital Growth Models with Minimum Expected Time Criteria, Working Paper, Mimeo., University of British Columbia (1990).
5. MacLean, L.C., Ziemba, W.T. and Blazenko, G., Growth versus Security in Dynamic Investment Analysis, Working Paper 88-2, School of Business Administration, Dalhousie University (1988), (to be appeared in *Management Science*, (1992)).
6. Markowitz, H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, N.Y., 1959.